6. Потпростори и њихове суме

На овом месту биће дефинисан појам који је до сада био схватан само интуитивно - појам потпростора; следећа дефиниција применљива је и код Хилбертових и код коначно-димензионалних унитарних простора.

Дефиниција 6.1. Нека је $\mathbb{U}$ унитарни простор, а $\mathbb{W}$ непразан подскуп поменутог простора: $\mathbb{W} \subset \mathbb{U}$. Ако је $\mathbb{W}$, сам за себе, унитарни простор у односу на линеарне комбинације и скаларни производ из $\mathbb{U}$, онда је $\mathbb{W}$ *потпростор* простора $\mathbb{U}$.

Дакле, ако из $|w_1\rangle, |w_2\rangle \in \mathbb{W} \subset \mathbb{U}$ следи да је $\alpha_1 |w_1\rangle + \alpha_2 |w_2\rangle \in \mathbb{W}$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$, онда $\mathbb{W}$ јесте потпростор простора $\mathbb{U}$, пошто се скаларни производ, будући да је пресликавање које није затворено (није бинарна операција), аутоматски преноси у потпростор $\mathbb{W}$.

Одмах се може уочити да потпростор $\mathbb{W}$ мора садржавати нулти елемент, јер је $(-1)|w\rangle + 1|w\rangle = |0\rangle \in \mathbb{W}$.

Пример 6.1.1. Један тривијални потпростор било ког простора $\mathbb{U}$ јесте $\{|0\rangle\}$...

Пример 6.1.2. ...док је други сам простор $\mathbb{U}$.

Пример 6.1.3. Подскуп $\{P_n(t)\}$ свих алгебарских полинома степена $\leq n$ у простору $\mathbb{C}[a,b]$.

Пример 6.1.4. Подскуп $\mathbb{R}^2$ свих слободних вектора паралелних датој равни представља потпростор простора $\mathbb{R}^3$ свих слободних вектора.

Како је по дефиницији сваки потпростор унитарног простора и сам унитарни простор, на њега се преносе сви појмови уведени за просторе, нпр. базис, димензионалност, ортогоналност, итд.

Најједноставније је формирати потпростор на следећи начин: над произвољним скупом вектора $\mathbb{S} \subset \mathbb{U}$ се формирају све могуће линеарне комбинације. Тиме се добија линеал $\mathbb{L}(\mathbb{S})$, сетити се **дефиниције 2.8**, који је у случају коначно-димензионалног унитарног простора уједно и потпростор, и то најмањи потпростор који садржи дати скуп $\mathbb{S}$, тј. он је пресек свих потпростора који садрже $\mathbb{S}$. У бесконачно-димензионалном случају линеал над датим скупом мора се допунити свим граничним елементима конвергентних низова у њему да би био потпростор.

Потпростори у Хилбертовом простору могу бити и коначно-димензионални и бесконачно-димензионални.

Пресек два или више потпростора такође је потпростор.

Дефиниција 6.2. Нека су $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ два потпростора унитарног простора $\mathbb{U}$. Тада је *сума* $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$ та два потпростора линеал над њиховом унијом

$$\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \mathbb{L}\left(\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2\right).$$

Другачије речено, реч је о скупу вектора облика $\alpha_1 |w_1\rangle + \alpha_2 |w_2\rangle$, $|w_1\rangle \in \mathbb{W}_1$, $|w_2\rangle \in \mathbb{W}_2$, што се може записати и као

$$\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \left\{\alpha_1 |w_1\rangle + \alpha_2 |w_2\rangle : |w_1\rangle \in \mathbb{W}_1, |w_2\rangle \in \mathbb{W}_2\right\}.$$

Могуће је дефинисати и суму више потпростора.

Дефиниција 6.3. Сума два потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ је *директна сума* $\mathbb{W}_1 \dot{+} \mathbb{W}_2$ ако је $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \left\{|0\rangle\right\}$.

Такође се може дефинисати директна сума више потпростора.

Напомена: Простор $\mathbb{W}_1 \dot{+} \mathbb{W}_2$ може се разложити на директну суму потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ јер се сваки његов елемент $|v\rangle \in \mathbb{W}_1 \dot{+} \mathbb{W}_2$ може на јединствен начин написати као $|v\rangle = |w_1\rangle + |w_2\rangle$, $|w_1\rangle \in \mathbb{W}_1$, $|w_2\rangle \in \mathbb{W}_2$.

Два потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ унитарног простора $\mathbb{U}$ су *ортогонална* $\mathbb{W}_1 \perp \mathbb{W}_2$ ако је $\langle w_1 | w_2 \rangle = 0$, $\forall |w_1\rangle \in \mathbb{W}_1$ и $\forall |w_2\rangle \in \mathbb{W}_2$.

Очигледно је да је елемент $|v\rangle \notin \mathbb{W}$ ортогоналан на потпростор $\mathbb{W}$ ако је $|v\rangle$ ортогоналан на дати базис у $\mathbb{W}$.

Дефиниција 6.4. Нека је у унитарном простору $\mathbb{U}$ дат подскуп $\mathbb{W}$ који не мора бити потпростор. Скуп свих вектора из $\mathbb{U}$ ортогоналних на сваки вектор из $\mathbb{W}$ назива се *ортокомплемент* подскупа $\mathbb{W}$ и пише се као $\mathbb{W}^{\perp}$: $\mathbb{U} = \mathbb{W} \oplus {}^{\perp}$.

Треба одмах уочити да је $\mathbb{W}^{\perp}$ потпростор независно од тога шта је $\mathbb{W}$, јер из $|w_1^{\perp}\rangle, |w_2^{\perp}\rangle \in \mathbb{W}^{\perp}$ и $|w\rangle \in \mathbb{W}$ следи да је $\langle w | w_1^{\perp} \rangle = 0$ и $\langle w | w_2^{\perp} \rangle = 0$, те је

$$\left\langle w \middle| \alpha_1 |w_1^{\perp}\rangle + \alpha_2 |w_2^{\perp}\rangle \right\rangle = 0, \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F},$$

односно $\alpha_1 |w_1^{\perp}\rangle + \alpha_2 |w_2^{\perp}\rangle \in \mathbb{W}^{\perp}$, што значи да $\mathbb{W}^{\perp}$ јесте потпростор.

Дефиниција 6.5. Директна сума потпростора $\mathbb{W}_1 \dot{+} \mathbb{W}_2$ назива се *ортогоналном сумом* $\mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$ ако је $\mathbb{W}_1 \perp \mathbb{W}_2$, тј. ако су потпростори $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ међусобно ортогонални.

Уопштење: $\mathbb{U}$ је ортогонална сума својих потпростора $\mathbb{U} = \mathbb{W}_1 \oplus \ldots \oplus {}_n$ ако је $\mathbb{U} = \mathbb{W}_1 \dot{+} \ldots \dot{+} {}_n$ и $\mathbb{W}_i \perp \mathbb{W}_j$, $\forall i \neq j$.

Такође, ортокомплемент $\mathbb{W}^{\perp}$ једнозначно је одређен самим потпростором $\mathbb{W}$, док то није случај за било који директни комплемент $\mathbb{W}^{\mathrm{dir}}$ дефинисан на следећи начин: $\mathbb{U} = \mathbb{W} \dot{+} {}^{\mathrm{dir}}$.

Пример 6.5.1. Ортокомплемент одређене равни која пролази кроз координантни почетак јесте права која пролази кроз координантни почетак и ортогонална је на ту раван, док је директни комплемент поменуте равни свака друга права која пролази кроз координантни почетак, а не лежи у тој равни.

Увек важи да је $\mathbb{U}=\mathbb{W}\oplus\quad{}^{\perp}$, те је свака ортогонална сума истовремено и директна, али обрнуто не важи.

Теорема 6.1. Нека је $\mathbb{W}$ потпростор унитарног простора $\mathbb{U}$. Тада се сваки вектор $|v\rangle \in \mathbb{U}$ може само на један начин разложити на две компоненте

$$|v\rangle = |w\rangle + |w^{\perp}\rangle,$$

где је $|w\rangle \in \mathbb{W}$ и $|w^{\perp}\rangle \in \mathbb{W}^{\perp}$, односно важи да је $\mathbb{U}=\mathbb{W}\oplus\quad{}^{\perp}$.

Доказ.

Нека је $\left\{|\mathrm{e}_i\rangle, i=\overline{1,m}\right\}$ ортонормиран скуп који образује потпростор $\mathbb{W}$. Такав скуп постоји и у коначно- и у бесконачно-димензионалном случају. Тада су за дат $|v\rangle \in \mathbb{U}$ потпуно одређени следећи вектори

$$|w\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle \mathrm{e}_i | v\rangle |\mathrm{e}_i\rangle \quad \text{и} \quad |w^{\perp}\rangle = |v\rangle - |w\rangle = |v\rangle - \sum_{i=1}^{m} \langle \mathrm{e}_i | v\rangle |\mathrm{e}_i\rangle .$$

Очигледно је да $|w\rangle \in \mathbb{W}$, као и да је

$$\langle \mathrm{e}_j | w^{\perp}\rangle = \langle \mathrm{e}_j | v\rangle - \sum_{i=1}^{m} \langle \mathrm{e}_i | v\rangle \langle \mathrm{e}_j | \mathrm{e}_i\rangle = \langle \mathrm{e}_j | v\rangle - \sum_{i=1}^{m} \langle \mathrm{e}_i | v\rangle \delta_{ij} = \langle \mathrm{e}_j | v\rangle - \langle \mathrm{e}_j | v\rangle = |0\rangle,$$

односно $|w^{\perp}\rangle \perp |\mathrm{e}_i\rangle$, те је $|w^{\perp}\rangle \perp \mathbb{W}$ илити $|w^{\perp}\rangle \in \mathbb{W}^{\perp}$.

Нека постоји још једно разлагање $|v\rangle = |\tilde{w}\rangle + |\tilde{w}^{\perp}\rangle$, $|\tilde{w}\rangle \in \mathbb{W}$, $|\tilde{w}^{\perp}\rangle \in \mathbb{W}^{\perp}$. Онда је $|w\rangle + |w^{\perp}\rangle = |\tilde{w}\rangle + |\tilde{w}^{\perp}\rangle$, односно из $|w\rangle - |\tilde{w}\rangle = |\tilde{w}^{\perp}\rangle - |w^{\perp}\rangle = |u\rangle$ следи да је $|u\rangle \in \mathbb{W}$ и $|u\rangle \in \mathbb{W}^{\perp}$, што је еквивалентно исказу $\langle u|u\rangle = 0$, те је на крају $|u\rangle = |0\rangle$. Дакле, разлагање је *јединствено*.

Q.E.D.

Вектор $\left| w \right\rangle$ јесте *пројекција* вектора $|v\rangle$ на потпростор $\mathbb{W}$, док је вектор $\left| w^{\perp} \right\rangle$ *нормала* вектора $|v\rangle$ на потпростор $\mathbb{W}$.

Нормала представља *најкраће растојање* од вектора $|v\rangle$ до потпростора $\mathbb{W}$.

Нека је $\left| \underline{w} \right\rangle$ елемент потпростора $\mathbb{W}$, такав да је $\left| \underline{w} \right\rangle \neq \left| w \right\rangle$. Онда је

$$\left\| \left| w^{\perp} \right\rangle \right\|^2 = \left\| \left| v \right\rangle - \left| w \right\rangle \right\|^2 = \left\| \left| v \right\rangle - \left| \underline{w} \right\rangle + \left| \underline{w} \right\rangle - \left| w \right\rangle \right\|^2 .$$

Сад, на основу Питагорине теореме $\left\| |k_1\rangle + |k_2\rangle \right\|^2 = \left\| |k_1\rangle \right\|^2 + \left\| |k_2\rangle \right\|^2$ је

$$\left\| \left| w^{\perp} \right\rangle \right\|^2 = \left\| \left| v \right\rangle - \left| \underline{w} \right\rangle \right\|^2 + \left\| \left| \underline{w} \right\rangle - \left| w \right\rangle \right\|^2 ,$$

а, пошто је наглашено да је $\left| \underline{w} \right\rangle - \left| w \right\rangle \neq \left| 0 \right\rangle$, мора бити

$$\left\| \left| w^{\perp} \right\rangle \right\| \leq \left\| \left| v \right\rangle - \left| \underline{w} \right\rangle \right\| ,$$

одакле је јасно да је нормала $\left| w^{\perp} \right\rangle = \left| v \right\rangle - \left| w \right\rangle$ заиста најкраће растојање од вектора $|v\rangle$ до потпростора $\mathbb{W}$. Стога се још каже да је пројекција $|w\rangle$ најбоља апроксимација вектора $|v\rangle$ одређеним вектором из датог потпростора $\mathbb{W}$.